

# Die Bedeutung der Ausgleichsrechnung für Aufgaben der Photogrammetrie

Konecny, Gottfried

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977,  
S.155-192



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

## Die Bedeutung der Ausgleichsrechnung für Aufgaben der Photogrammetrie

Von Gottfried Konecny

### 1. C. F. Gauß und die Methode der kleinsten Quadrate

Die Ausgleichsrechnung hat bekanntlich das Ziel, überschüssige Beobachtungen für zu ermittelnde Größen zu verarbeiten, daß diese Größen mit der höchsten Wahrscheinlichkeit als von jedem Rechner reproduzierbare bestimmte Werte erhalten werden können.

Die Ausgleichsrechnung führt somit zu einem geordneten, überprüfbar System der Berechnungsweise. Sie ermöglicht die Bestimmung der wahrscheinlichsten Lösung eines gestellten Problems, und sie erlaubt gleichzeitig eine Aussage über Zuverlässigkeit der Lösung an Hand des überschüssigen Beobachtungsmaterials.

Als Carl Friedrich Gauß sich im Jahre 1794, im Alter von 17 Jahren, am Collegium Carolinum in Braunschweig für seine Universitätsstudien vorbereitete, stieß er auf ein Werk Lamberts: „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung“, welches sich unter anderem mit der Behandlung einer Überzahl von Beobachtungen befaßte [1], [2]. Lambert teilt darin ein Verfahren zur Bestimmung der Länge des tropischen Jahres mit, in welchem zwei Größen aus einer Vielzahl von einem halben Jahrhundert gemachten Beobachtungen ermittelt werden sollten.

Die Beobachtungsgleichungen,  $n$  an der Zahl, lauten

$$t_i x + y = l_i + v_i$$

Lambert teilt diese  $n$  Gleichungen in zwei Gruppen  $n_1$  und  $n_2$ , für welche er Mittelwerte  $L$  und  $T$  bestimmt:

$$(L_1 = \frac{\sum l_1}{n_1}, \quad T_1 = \frac{\sum t_1}{n_1}$$

$$L_2 = \frac{\sum l_2}{n_2}, \quad T_2 = \frac{\sum t_2}{n_2})$$

die damit aufgestellten Bestimmungsgleichungen

$$T_1 x + y = L_1$$

$$T_2 x + y = L_2$$

führen zu einer eindeutigen Lösung für  $x$  und  $y$ .

Gauß erkannte sogleich die Willkür der Gruppeneinteilung und kam zur Methode der kleinsten Quadrate als Ausgleichsprinzip. Ausgehend von Lambert, welcher bereits

zwischen regelmäßigen und zufälligen Fehlern unterscheidet, und auf eine Symmetrie einer nach außen abfallenden Wahrscheinlichkeitskurve der zufälligen Fehler hinweist, verwirft er die Summe der absoluten Werte als Fehlermaß und als Ausgleichsgrundlage und entscheidet sich für die Summe gerader Potenzen der Fehler, unter ihnen das Quadrat als die einfachste Lösung.

Die Niederschrift einer Gaußschen Vorlesung aus dem Jahre 1852 besagt, daß Gauß diese Methode schon 1795 ausgearbeitet hatte.

Mit der Veröffentlichung der Methode der kleinsten Quadrate kam ihm allerdings A. M. Legendre im Jahre 1806 zuvor, welcher sie erstmalig so nannte und auf die Berechnung von Kometenbahnen anwandte.

Bereits 1802 aber wandte Gauß das Prinzip auf die Vorhersage der Bahn des Planeten Ceres aus Beobachtungen des Astronomen Piazzi von 1801 mit Erfolg an. Erst 1809, 1821, 1823 und 1826 veröffentlicht er in seinen Werken „*Theoria motus corporum coelestium*“ und „*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxia* – pars prior, posterior und supplementum“ die Grundlagen für die klassische Theorie der Ausgleichsrechnung, welche seit dem Buch F. R. Helmerts „*Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente*“ erweitert und zum Allgemeingut geodätischer Verfahrensweisen geworden sind.

Bezeichnend ist jedoch, daß schon Gauß die Methode der kleinsten Quadrate nicht nur auf die Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern, sondern bereits auf geodätische Aufgaben der Gradmessung und der Netzausgleichung angewandt hat. Es ist ferner bezeichnend, daß Gauß seine parallel zu Legendre gemachten Überlegungen frei von Eitelkeit dem naturwissenschaftlichen Fortschritt unterordnete und ihnen sogar den von Legendre geschaffenen Namen „Methode der kleinsten Quadrate“ übertrug.

## 2. Die Anfänge der Photogrammetrie

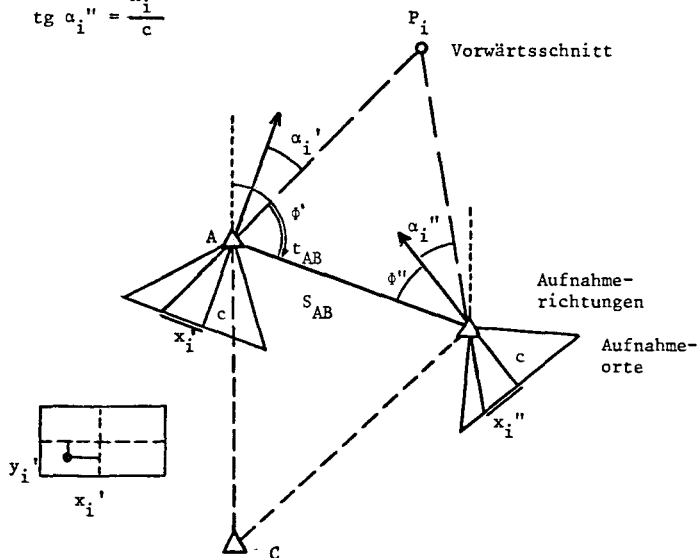
Die Anwendung der Ausgleichung im geodätischen Bereich war zunächst das Hauptanliegen der Landesvermessung oder der Erdmessung. Erst seit der Einführung der Katasteranweisung von 1881 durch Friedrich Gustav Gauß in das preußische Kataster wurde sie Angelegenheit des Vermessungswesens schlechthin.

Gerade in diese Zeit fiel jedoch die Entwicklung der Photogrammetrie als geodätisches Meßverfahren. Zunächst war es die terrestrische Photogrammetrie, welche in der Architektur durch A. Meydenbauer (1885) und in der Glaziologie (1888) durch S. Finsterwalder die rasche Feldvermessung erlaubte (Abb. 1). Die Aufnahmen wurden durch das Verfahren der Meßtischphotogrammetrie graphisch oder rechnerisch punktweise, durch ebene Vorwärtsschnitte mit anschließender Höhenberechnung ausgewertet.

Da bei der terrestrischen Photogrammetrie eine bekannte innere und äußere Orientierung der Aufnahmen vorausgesetzt wurde, bestand der Ausgleichungsaufwand lediglich in der Bestimmung der Aufnahmeorte nach ebenen geodätischen Verfahren. Beim Vorwärtsschnitt in der Ebene ergab sich photogrammetrisch keine Übereinstimmung. Die Höhe wurde über das Mittel der beiden Strahlen bestimmt.

$$\operatorname{tg} \alpha_i' = \frac{x_i'}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_i'' = \frac{x_i''}{c}$$



Lageberechnung:

$$t_{AP} = t_{AB} - \phi' + \alpha'$$

$$t_{BP} = t_{AB} - 180^\circ + \phi' + \alpha''$$

$$S_{AP} = S_{AB} \frac{\sin(\phi'' + \alpha'')}{\sin \gamma}$$

$$S_{BP} = S_{AB} \frac{\sin(\phi' + \alpha')}{\sin \gamma}$$

$$\gamma = 180^\circ - [(\phi' - \alpha') + (\phi'' + \alpha'')]$$

$$x_i = x_A + S_{AP} \cdot \cos t_{AP} = x_B + S_{BP} \cdot \cos t_{BP}$$

$$y_i = y_A + S_{AP} \cdot \sin t_{AP} = y_B + S_{BP} \cdot \sin t_{BP}$$

Höhenberechnung:

$$\operatorname{tg} \beta_i' = \frac{y_i'}{c} ; \quad \operatorname{tg} \beta_i'' = \frac{y_i''}{c}$$

$$h_i = h_A + i_A + S_{AP} \cdot \operatorname{tg} \beta_i' = h_B + i_B + S_{BP} \cdot \operatorname{tg} \beta_i''$$

Abb. 1  
Meßtischphotogrammetrie

Erst als man die photogrammetrische Aufgabe aus der Luft anzuwenden begann, ergaben sich Schwierigkeiten bei der Bestimmung des Aufnahmeortes. Auch war im Gegensatz zur terrestrischen Photogrammetrie eine genaue horizontale oder in diesem Fall vertikale Aufnahmerichtung nicht mehr möglich, da es sich nicht mehr um feste Standpunkte handelte. Eine Zerlegung der Aufgabe in ein im Vermessungswesen übliches ebenes und vertikales Problem war daher nicht mehr möglich (Abb. 2).

Sebastian Finsterwalder, der 1899 die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie theoretisch mit den Mitteln der darstellenden Geometrie, aber auch analytisch dargelegt hat [3], behandelt erstmalig in der photogrammetrischen Literatur die Aufgabe des räumlichen Rückwärtsschnitts. Bei Kenntnis der inneren Orientierung der Aufnahmen ist hierfür die bekannte Lage und Höhe von 3 Paßpunkten erforderlich, welche die Entfernungen des Paßpunktdreiecks  $a$ ,  $b$ ,  $c$  festlegen.

Aus den Bildkoordinaten der 3 Punkte sind aber auch die Raumwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  zwischen den Strahlen vom Projektionszentrum zu diesen Punkten bestimmbar.

Die Lösung für die Strahlenlängen, welche den Aufnahmeort bestimmen, führt zu einer Gleichung 4. Grades, welche Finsterwalder näherungsweise auflöst, zunächst noch ohne Ausgleichung.

Kurz darauf befaßt er sich aber mit der praktischen Aufgabe, Ballonaufnahmen analytisch auszuwerten [4], [5] – (Abb. 3).

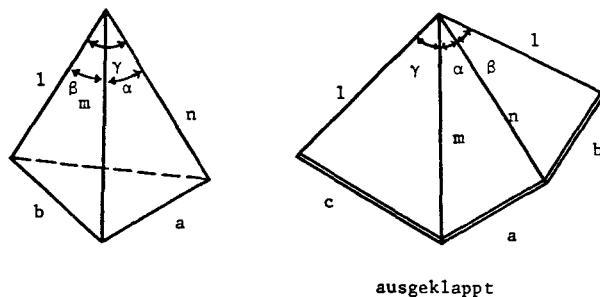
1903 stellt er seine Abhandlung „Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen“ vor, zusammen mit einer analytisch abgeleiteten Karte von Gars am Inn.

Finsterwalder schreibt hierüber:

„Solange die Bestimmung der Standpunkte und der Orientierung der Bilder als nahezu fehlerfrei angesehen werden kann, fallen etwaige Mißstimmigkeiten in den Kontrollen der photogrammetrischen Arbeit zur Last; wenn diese Voraussetzung nicht mehr zutrifft, kann man sich die Aufgabe stellen, durch Verbesserung der angenommenen Standpunkte und Orientierungen ein möglichst günstiges Stimmen der Kontrollen herbeizuführen; ja man wird sich sogar die Frage vorlegen, ob denn die in beliebig großer Anzahl zu bildenden Bedingungen der Höhenkontrollen nicht ausreichen, um unabhängig von jeder Kenntnis der Standpunkte und der Orientierung das Objekt und die Lage der Standpunkte gegenüber dem Objekt zu bestimmen.“

Finsterwalder zerlegt das Problem in die Aufgabe der gegenseitigen und der absoluten Orientierung. Bei der Lösung der Aufgabe benutzt er zunächst die Definition der Kernpunkte. Bei Kenntnis der inneren Orientierung der Bilder (nämlich des Hauptpunktes und der Bildweite) genügt dabei die Kenntnis entsprechender Bildkoordinaten von 5 Geländepunkten.

Die auf Schröter [6] zurückgehende Lösung stellt eine Gleichung dritten Grades dar, die seinerzeit auf praktische Schwierigkeiten stieß (Abb. 4). Deshalb benutzt Finsterwalder die näherungsweise angenommene Orientierung der Kamera zur genäherten Ermittlung der Kernpunkte  $O_2'$  und  $O_1''$ . Mit ihrer Hilfe bestimmt er die Kernebenen, d. h. deren Rotationswinkel  $\Psi$  bezogen auf eine die Aufnahmeorte enthaltene Vertikal-



$$a^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha$$

$$b^2 = n^2 + 1^2 - 2n1 \cos \beta$$

$$c^2 = 1^2 + m^2 - 21m \cos \gamma$$

$$\text{aus } a^2 b^2 - a^2 c^2 = 0; \quad \text{und } a^2 c^2 - a^2 b^2 = 0 :$$

$$m^2 b^2 + n^2 b^2 - 2mn b^2 \cos \alpha - n^2 a^2 - 1^2 a^2 + 2n1 a^2 \cos \beta = 0$$

$$m^2 c^2 + n^2 c^2 - 2mnc^2 \cos \alpha - 1^2 a^2 - m^2 a^2 + 21ma^2 \cos \gamma = 0$$

Division durch  $1^2$

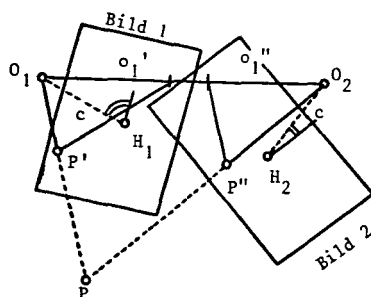
$$\left(\frac{m}{1}\right)^2 b^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 (b^2 - a^2) - 2 \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot b^2 \cos \alpha + 2 \cdot \frac{n}{1} a^2 \cos \beta - a^2 = 0$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)^2 c^2 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 (c^2 - a^2) - 2 \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot c^2 \cos \alpha + 2 \cdot \frac{m}{1} a^2 \cos \gamma - a^2 = 0$$

Ausdrücken von  $\frac{m}{1}$  in  $\frac{n}{1}$  führt zu Gleichung 4. Grades

Abb. 2

S. FINSTERWALDER · Räumlicher Rückwärtsschnitt nach Marx 1880



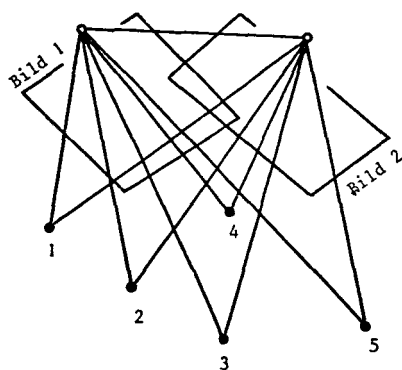
Aufnahmeorte  $O_1, O_2$

Kernpunkte  $O_2', O_1''$

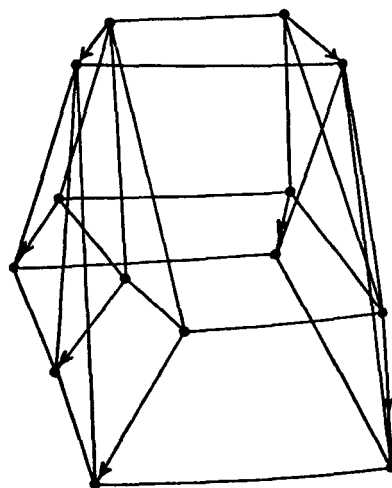
Hauptpunkte  $H_1, H_2$

Kernebene  $O_1O_2P$

Kernstrahlen  $P'O_2', P''O_1''$

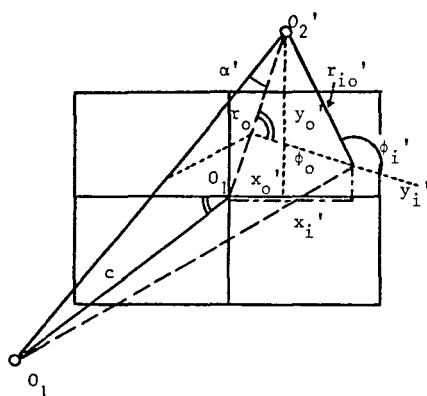


Gegenseitige Orientierung  
5 Parameter



Absolute Orientierung  
7 Parameter

Abb. 3  
S. FINSTERWALDERS Grundaufgabe der Photogrammetrie



$$\operatorname{tg} \phi_o' = \frac{y_o'}{x_o'}$$

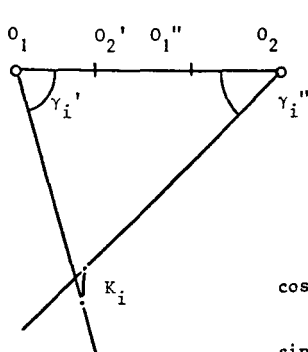
$$r_o' = \frac{y_o'}{\sin \phi_o'} = \frac{x_o'}{\cos \phi_o'}$$

$$\operatorname{tg} \phi_i' = \frac{y_i' - y_o'}{x_i' - x_o'}$$

$$r_{io}' = \frac{y_i' - y_o'}{\sin \phi_i'} = \frac{x_i' - x_o'}{\cos \phi_i'}$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{r_o'}{c}; \quad \psi_i' \quad \text{Winkel zw. Ebene } O_1O_1'O_2' \quad \text{und Ebene } O_1O_2'P_i$$

$$\operatorname{tg} \psi_i' = \operatorname{tg} (\phi_i' - \phi_o') \sin \alpha'$$



$$x_i' = \psi_i' - \frac{\Sigma \psi_i'}{n}$$

$$x_i'' = \psi_i'' - \frac{\Sigma \psi_i''}{n}$$

$$x_i = \frac{x_i' + x_i''}{2}$$

$$\cos \beta_i' = \cos \alpha' \cos (\phi_i' - \phi_o')$$

$$\sin \gamma_i' = \sin \beta_i' \frac{r_{io}'}{d_i'}, \quad d_i' = \sqrt{c^2 + x_i'^2 + y_i'^2}$$

$$h_i = \frac{\sin \gamma_i' \sin \gamma_i''}{\sin (\gamma_i' + \gamma_i'')}$$

$$X_i = h_i \sin \chi_i$$

$$Y_i = h_i \operatorname{ctg} \gamma_i'$$

$$Z_i = h_i \cos \chi_i$$

$$K_i = h_i (\chi_i - \chi_i'')$$

Abb. 4

S. FINSTERWALDER · Gegenseitige Orientierung



ebene. Bei genäherter Kenntnis der Kernstrahlen werden die in beiden Bildern enthaltenen Geländepunkte windschiefe Strahlenbündel ergeben. Sie sind solange zu verschieben, bis die Summe der Quadrate ihrer kürzesten Abstände  $k_j$  ein Minimum wird.

Somit benutzt Finsterwalder erstmalig die Methode der kleinsten Quadrate für eine photogrammetrische Aufgabe.

Ist diese Ausgleichung abgeschlossen, so werden entlang der Kernebenen die Modellkoordinaten der Objektpunkte durch Vorwärtsschnitt berechnet und in den Raum projiziert (Abb. 5).

Im Anschluß daran erfolgt die Orientierung. Über mindestens 2 Lage- und 3 Höhenpaßpunkte wird der Maßstab und die räumliche Drehung des Modells bestimmt. Auch hier benutzt Finsterwalder eine über Quaternionen abgeleitete, für die Ausgleichung geeignete Lösung für die 7 Orientierungsparameter (3 Translationen, 3 Rotationen, 1 Maßstab) – (Abb. 6).

Durch Bezug auf ein Schwerpunktssystem erweiterte er dabei die Lösung der Helmerttransformation von 2 auf 3 Dimensionen. Dabei brauchte nur ein Gleichungssystem von 3 statt 7 Gleichungen (wie in der Ebene 2 statt 4 Gleichungen) aufgelöst zu werden.

Man kann heute wohl kaum ermessen, welcher Rechenaufwand für diese räumlich gelöste Aufgabe der photogrammetrischen Auswertung nötig war. Finsterwalder war seiner Zeit weit voraus, und es gibt wohl bis auf den heutigen Tag nur wenige Photogrammeter, die seine Gedanken nachvollzogen, und die schon damals in Vektorschreibweise ausgedrückten, komplizierten Rechenwege ausgeführt haben.

### 3. Photogrammetrische Auswertung durch Geräte

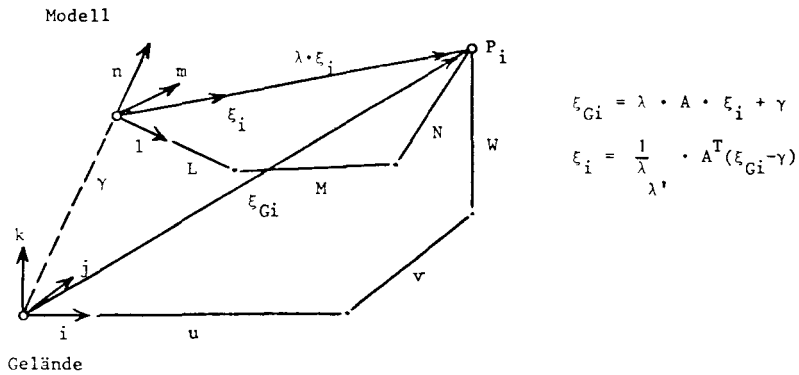
Doch trat plötzlich eine Wende ein, welche zunächst durch die Erfindung des Stereokomparators durch Pulfrich im Jahre 1901 eingeleitet wurde [7]. Mit diesem Gerät wurde erstmalig das räumliche Sehen als Meßmittel eingeführt (Abb. 7).

1907 wurde von der österreichischen Landesaufnahme, bei welcher von Orel mitwirkte, das Ortlergebiet terrestrisch, stereoskopisch aufgenommen [8].

Von Orel schreibt hierüber:

„Bei allen Vorzügen machte sich jedoch ein Umstand besonders unangenehm fühlbar; das rasch und verhältnismäßig leicht gewonnene Feldaufnahmемaterial konnte in der nächsten Winterarbeitsperiode, trotz verlängerter Arbeitszeit und erhöhtem Personalstand, nur mit Mühe bewältigt werden. Die monotone Ausrechnung der Komparatorkoordinaten, das fortwährende Arbeiten mit Zahlen, im allgemeinen ohne Kontrolle, dann weiter das umständliche konstruktive Auftragen der Rechnungsergebnisse, waren unvermeidliche Fehlerquellen.“ (Abb. 8).

Im Herbst 1907, vorübergehend im Krankenbett, verfolgte ihn der Alptraum eines Stereokomparators mit abzulesenden Skalen, und plötzlich sah er die mechanische Lenkerlösung des ersten Stereoauswertegerätes vor sich, welches unter Mithilfe



$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{pmatrix}$$

Linearisiert:

$$v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{pmatrix} d\lambda' + \begin{pmatrix} -W_i \\ 0 \\ u_i \end{pmatrix} d\phi + \begin{pmatrix} 0 \\ W_i \\ -v_i \end{pmatrix} d\omega + \begin{pmatrix} v_i \\ -u_i \\ 0 \end{pmatrix} d\kappa - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dy_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz_0 + \begin{pmatrix} x_{i\text{ber}} \\ y_{i\text{ber}} \\ z_{i\text{ber}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i\text{gem}} \\ y_{i\text{gem}} \\ z_{i\text{gem}} \end{pmatrix}$$

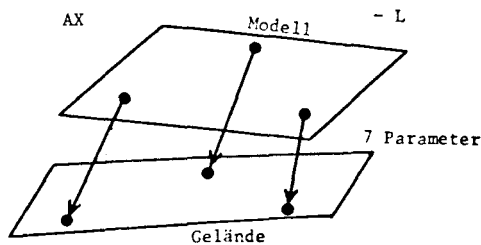
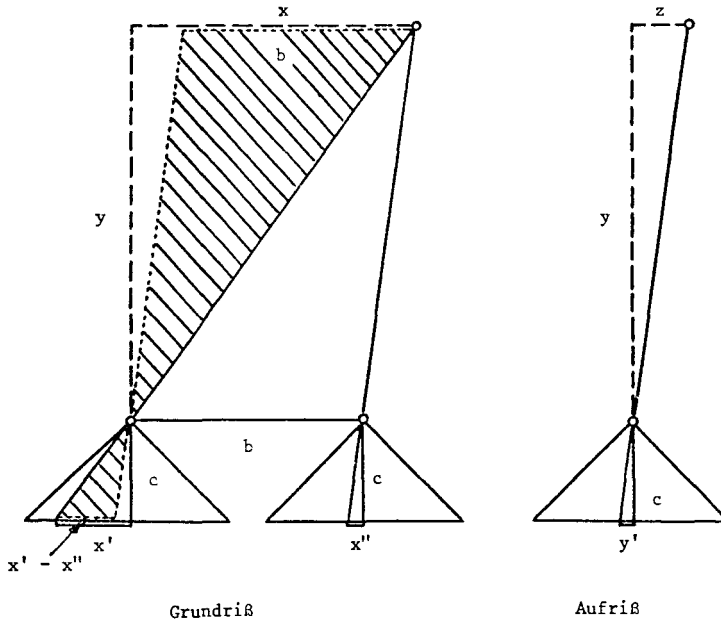


Abb. 5

S. FINSTERWALDER · Absolute Orientierung

												$  \begin{array}{cccccc}  L_1 & -w_1 & 0 & v_1 & -1 & 0 & 0 \\  M_1 & 0 & w_1 & -u_1 & 0 & -1 & 0 \\  N_1 & u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\  \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\  \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\  L_n & -w_n & 0 & v_n & -1 & 0 & 0 \\  M_n & 0 & w_n & -u_n & 0 & -1 & 0 \\  N_n & u_n & -v_n & 0 & 0 & 0 & -1  \end{array}  $											
$A^T$																							
$A$												$(A^T A)$											
$  \begin{array}{cccccccccccc}  L_1 & M_1 & N_1 & \dots & L_n & M_n & N_n \\  -w_1 & 0 & u_1 & \dots & -w_n & 0 & u_n \\  0 & w_1 & -v_1 & \dots & 0 & w_n & -v_n \\  v_1 & -u_1 & 0 & \dots & v_n & -u_n & 0 \\  -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\  0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\  0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1  \end{array}  $												$  \begin{array}{ccccccc}  \Sigma(L_i^2 + M_i^2 + N_i^2) & \Sigma(w_i L_i + u_i N_i) & \Sigma(w_i M_i - v_i N_i) & \Sigma(v_i L_i - w_i) & \Sigma L_i & \Sigma M_i & \Sigma N_i \\  & \Sigma(w_i^2 + u_i^2) & \Sigma(-u_i v_i) & \Sigma(-w_i v_i) & \Sigma w_i & 0 & \Sigma -u_i \\  & & \Sigma(w_i^2 + v_i^2) & \Sigma(-w_i u_i) & 0 & \Sigma -w_i & \Sigma v_i \\  & & & \Sigma(v_i^2 + u_i^2) & \Sigma -v_i & \Sigma u_i & 0 \\  & & & & \underline{n} & 0 & 0 \\  & & & & & \underline{n} & 0 \\  & & & & & & \underline{n}  \end{array}  $											
												$(A^T A)$ für Schwerpunktsystem											



$$x = \frac{y}{c} x'$$

$$z = \frac{y}{c} y'$$

$$y = \frac{b \cdot c}{x' - x''}$$

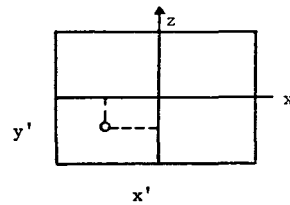


Abb. 7

Terrestrische Photogrammetrie · Stereophoto – (Normalfall)

Pulfrichs bei Zeiß 1908 fertiggestellt wurde und die Zeit der photogrammetrischen Stereoauswertegeräte als analoge Rechner einleitete (Abb. 9).

In bezug auf die Rekonstruktion der photogrammetrischen Aufnahmepaare hatte bereits Theodor Scheimpflug [9], den sein Lehrer Eduard Doležal von Wien aus zur Versammlung der Naturforscher und Ärzte nach Braunschweig mitnahm, in einem Vortrag ausgeführt:

„Sollte es nicht möglich sein, das Licht, welches uns die Bilder der Außenwelt in unglaublich kurzer Zeit auf die photographische Platte zauberte, auch hierzu zu verwenden, d. h., direkt auf optischem Wege aus den Photographien die Karten und Pläne herzustellen?“...

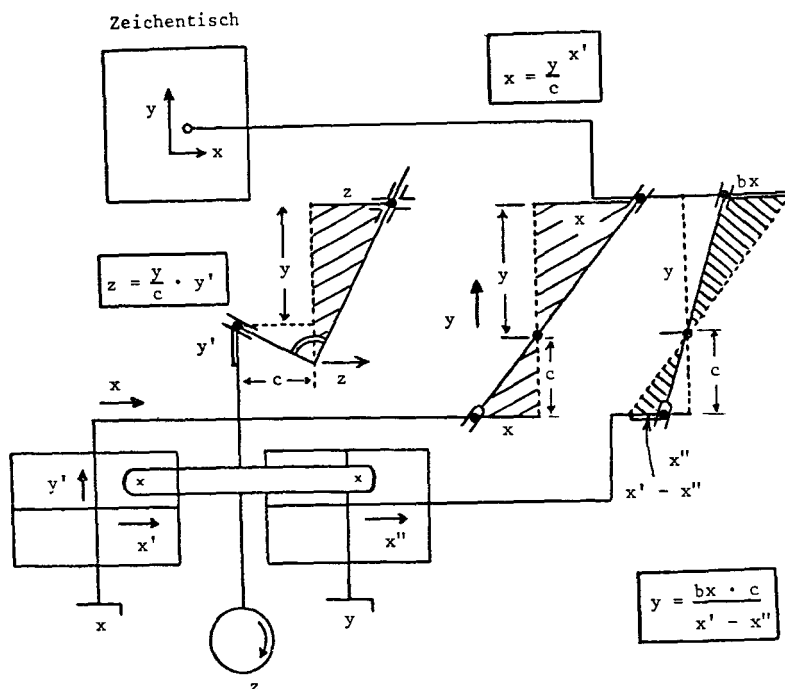


Abb. 8

Stereoaerograph · von Orel-Zeiss

Es folgt die Beschreibung der optischen Rekonstruktion der Strahlenbündel und das Schlußwort: „... Der Gedanke an sich eröffnet eine weite, berauschende Perspektive; ihr Schlußpunkt, ein Zukunftsbild, ist die Karte als Photographie.“

Bereits 1915 entwickelte und patentierte Max Gasser seinen Doppelprojektor, den Vorläufer des Zeißschen Multiplexes, des Nistrischen Photocartographen und des Zeiß-Bauersfeldschen Planigraphen. In seiner ihm eigenen Art hat er diese Erfindung in einer selbstgedruckten Streitschrift wie folgt beschrieben:

„In der Literatur vor 1915 sind nur theoretische Erörterungen über das Orientierungsproblem zu finden, die auf einem aussichtslosen Wege mittels Rechnung oder Zeichnung vergeblich dieser Frage näher zu kommen bestrebt waren. Es haben Scheimpflug, Doležal und S. Finsterwalder, die das Ansehen von Autoritäten auf dem Gebiete der Photogrammetrie haben, wegen der vermeintlichen Unlösbarkeit der Modell-auffindung der Lufttopographie bereits den Grabgesang angestimmt und resigniert von der Unmöglichkeit dieser Problemlösung in ihren Aufsätzen geschrieben. Und dies mit Recht! Denn diese Hauptaufgabe war nicht durch Rechnung zu lösen, sie war ein instrumentelles Problem, das nur auf optisch-mechanischem Wege einer Lösung näher gebracht werden konnte.“ (Abb. 10)

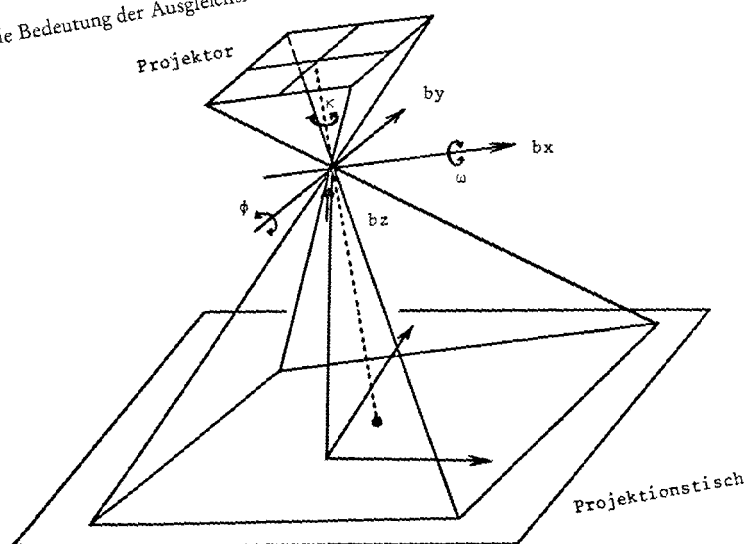


Abb. 9  
Optische Rekonstruktion nach Scheimpflug

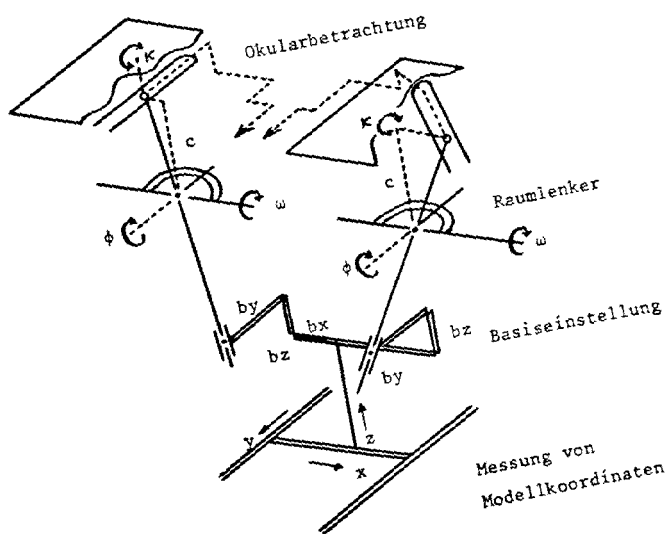


Abb. 10  
Wild-Autograph A7

Die Weiterentwicklung des durch von Orel geschaffenen mechanischen Prinzips der Bildauswertung auf Luftbilder geschah durch Reinhard Hugershoff, der zwei seiner „Bildmeßtheodoliten zur direkten Entnahme orientierter Winkel aus photographischen Maßbildern“ mit Richtungslinealen für Lage- und Höhenrekonstruktion durch Vorwärtsschnitt verband. Das 1917 patentierte Gerät wurde 1920 mit Modifikationen von der Firma Heyde gebaut. Auch Poiwilliers in Frankreich (1920) und Santoni (1921) in Italien folgten mit mechanischen Konstruktionen, die durch die große Folge der optisch-mechanischen und mechanischen Auswertegeräte der heute bekannten photogrammetrischen Industrie abgelöst wurden.

In Europa macht sich in den dreißiger Jahren das Schlagwort breit, „die Photogrammetrie sei die Kunst, Rechnungen zu vermeiden.“

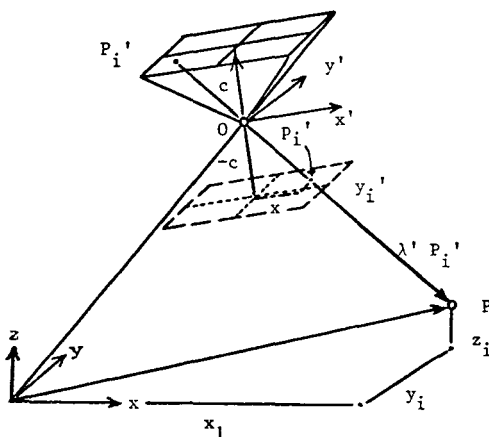
Nur in den USA arbeitet, sozusagen im stillen Kämmerlein, Earl Church an der analytischen Aufbereitung von räumlichem Vorwärts- und Rückwärtsschnitt, sowie der Doppelpunkteinschaltung im Raum. Er bringt unter Verwendung des Richtungskosinus die Aufgaben in eine numerisch in Iterationen mit der Kurbelrechenmaschine lösbare Form.

In Europa dagegen verlagert sich das Interesse auf instrumentelle Probleme und deren Theorie (Abb. 11). Paul Gast z.B. leitet „zur Abschätzung der Genauigkeit photogrammetrischer Verfahren mit Hilfe numerischer Werte partieller Differentialquotienten“ die Differentialformeln der photogrammetrischen Auswertung ab [11]. Dabei verwendet er, vermutlich erstmalig, die Bildkoordinaten als Funktion der Raumkoordinaten in Form der heute bekannten Kollinearitätsgleichungen, welche er als „Grundformeln der rechnenden Photogrammetrie“ bezeichnet. Diese Lösung entspricht dem Vorgehen an optischen und mechanischen Auswertegeräten, da dort Raumkoordinaten analog berechnet werden. Dies kommt der Inversion der Finsterwalder'schen Lösung gleich. Die Orientierung der Aufnahmen muß allerdings durch Drehung und Translation der Bildträger so wiederhergestellt werden, daß sich ein räumlicher Eindruck des Stereomodells ergibt. Dies ist nur bei richtiger gegenseitiger Orientierung der Fall. Zur rechnerischen Bestimmung der gegenseitigen oder absoluten Orientierung gibt Gast bereits die Fehlergleichungen und deren Lösung über die Methode der kleinsten Quadrate mit Beispielen an; erst 25 Jahre später sollte diese Lösung zur photogrammetrischen Standardaufgabe werden.

Während bei den Auswertegeräten die Lösung des Vorwärtsschnittes optisch oder mechanisch vorweggenommen wurde, ergaben sich in der Analogphotogrammetrie fortan nur Berechnungsprobleme der gegenseitigen und absoluten Orientierung der Bildpaare (Abb. 12).

Otto von Gruber schafft 1929 die Theorie der gegenseitigen und absoluten Orientierung an Auswertegeräten. Ausgehend von den Transformationsgleichungen für Geländekoordinaten aus Bildkoordinaten leitet er Differentialformeln für Modellkoordinatenverbesserungen  $dx$  und  $dy$  ab und verwendet die Bedingung  $dy_2 - dy_1 = dpy = 0$ . Zur Herleitung der Orientierungsschritte (Abb. 13).

Aufbauend auf Otto von Gruber befaßten sich Zeller [13], Brandenberger [14] und insbesondere Hallert [15] und Gotthardt [16] mit der Fehlertheorie der gegenseitigen und der absoluten Orientierung. Während die schweizerische Schule die Differential-



$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda_i' A \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix}$$

Umkehrung:

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_i'} \cdot A^T \begin{pmatrix} x_i - x_o' \\ y_i - y_o' \\ z_i - z_o' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_i' = -c \frac{a_{11}(x_i - x_o') + a_{21}(y_i - y_o') + a_{31}(z_i - z_o')}{a_{13}(x_i - x_o') + a_{23}(y_i - y_o') + a_{33}(z_i - z_o')} \\ y_i' = -c \frac{a_{12}(x_i - x_o') + a_{22}(y_i - y_o') + a_{32}(z_i - z_o')}{a_{13}(x_i - x_o') + a_{23}(y_i - y_o') + a_{33}(z_i - z_o')} \end{cases}$$

$$dx_i' = \frac{\delta x_i'}{\delta \phi} d\phi + \frac{\delta x_i'}{\delta \omega} d\omega + \dots ; \quad dy_i' = \frac{\delta y_i'}{\delta \phi} d\phi + \dots$$

Abb. 11

Kollinearitätsgleichungen in moderner Darstellung

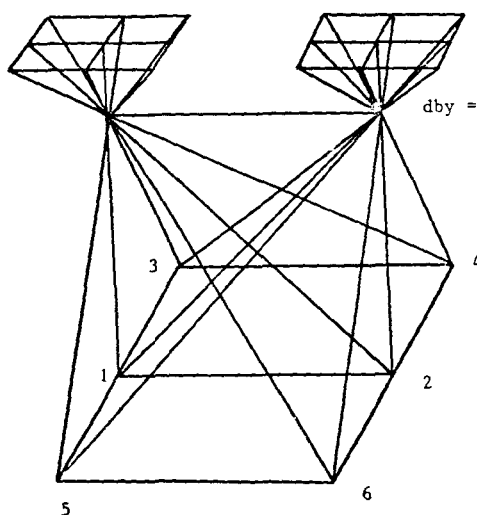


$$dx = dx_0 + \frac{x'}{c} dz_0 - \frac{y'h}{c} d\kappa + \left(1 + \frac{x'^2}{c^2}\right) h d\phi + \frac{x'y'h}{c^2} = d\omega$$

$$dy = dy_0 + \frac{y'}{c} dz_0 + \frac{x'h}{c} d\kappa + \frac{a'y'h}{c^2} d\phi + \left(1 + \frac{y'^2}{c^2}\right) h d\omega$$

$dx = x$  gemessen -  $x$  bekannt

$dy = y$  gemessen -  $y$  bekannt



in Pkt. 1 z. B.

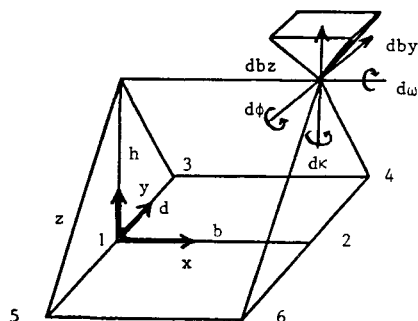
$$dby = dy_{\text{Bild 2}} - dy_{\text{Bild 1}} = 0$$

als Bedingung

Abb. 12

Von Grubersche Differentialformen  
in Hallertscher Vereinfachung für Senkrechtaufnahmen

formeln zur Herleitung von Orientierungsverfahren und deren Genauigkeitsabschätzung verwendet, legen Hallert und Gotthardt strikten Wert auf die Anwendung der Ausgleichsrechnung für die Orientierungsaufgaben und für die Abschätzung der Koordinatengenauigkeit durch Fehlerfortpflanzung. Dies geschieht allerdings bei Hallert noch unter der Annahme von Parallaxen der Modellkoordinaten als unabhängige Größen. Mit größerer Berechtigung sind aber die Bildkoordinaten als unabhängig und die Modellkoordinaten als korreliert zu betrachten. Trotz solcher Vernachlässigungen kommt Hallert das weltweite Verdienst zu, die Fehlertheorie der Photogrammetrie auf eine praktikable statistische Grundlage gestellt zu haben (Abb. 14).



$$v_{dby} = -dby - (x - b) d\kappa + \frac{y}{h} dbz - \frac{(x - b)y}{h} d\phi + \left(1 + \frac{y^2}{h^2}\right) h d\omega$$

Pkt	x	y	dby	dκ	dbz	dφ	dω	$x^T$	$L$	$v$
1	0	0	-1	b	0	0	h		$-p_1$	$v_1$
2	b	0	-1	0	0	0	h		$-p_2$	$v_2$
3	0	d	-1	b	$\frac{d}{h}$	$\frac{bd}{h}$	$h \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right)$		$-p_3$	$v_3$
4	b	d	-1	0	$\frac{d}{h}$	0	$h \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right)$		$-p_4$	$v_4$
5	0	-d	-1	b	$-\frac{d}{h}$	$-\frac{bd}{h}$	$h \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right)$		$-p_5$	$v_5$
6	b	-d	-1	0	$-\frac{d}{h}$	0	$h \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right)$		$-p_6$	$v_6$

A

$$\underline{AX - L = V}$$

Abb. 13  
Hallertsche gegenseitige Orientierung

dby	dk	dbz	dφ	dω	
6	-3b	0	0	-6h -4 $\frac{d^2}{h}$	$\Sigma p_i$
-3b	3b <sup>2</sup>	0	0	-3bh - $\frac{2bd^2}{h}$	$\frac{d}{h}(p_s - p_3 + p_6 - p_4)$
0	0	$\frac{4d^2}{h^2}$	$\frac{2bd^2}{h^2}$	0	b(p <sub>1</sub> + p <sub>3</sub> + p <sub>5</sub> )
0	0	$\frac{2bd^2}{h^2}$	$\frac{2b^2d^2}{h^2}$	0	$\frac{bd}{h}(p_5 - p_3)$
-6h	-3bh	0	0	6h <sup>2</sup> + 8d <sup>2</sup> + 4d <sup>4</sup> /h <sup>2</sup>	-h $\Sigma p_i$ - $\frac{d^2}{h}(p_3 + p_4 + p_5 + p_6)$
-4 $\frac{d^2}{h}$	- $\frac{2bd^2}{h}$				
$(A^T A)$					$(A^T L)$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T L = B L$$

$$\text{dann ist: } BB^T = (A^T A)^{-1}$$

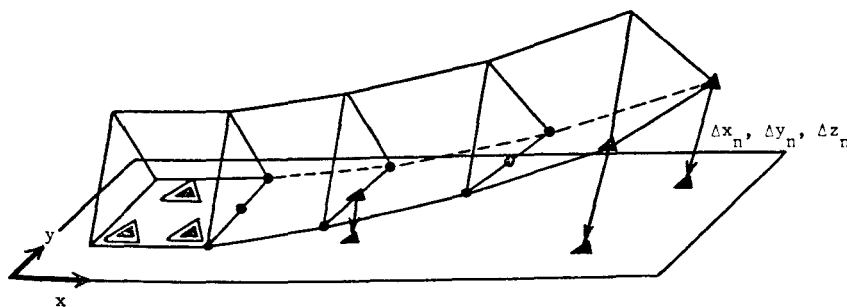
dby	dk	dbz	dφ	dω	
$\frac{2}{3} + \frac{h^2}{d^2} + \frac{3h^4}{4d^4}$	$\frac{1}{3b}$	0	0	$\frac{3h^3 + 2hd}{4d^4}$	$(A^T A)^{-1}$
$\frac{1}{3b}$	$\frac{2}{3b}$	0	0	0	
0	0	$\frac{h^2}{2d^2} - \frac{h^2}{2bd^2}$	0	0	$\delta_x^2 = \delta_o^2 (A^T A)^{-1}$
0	0	$-\frac{h^2}{2bd^2}$	$\frac{h^2}{b^2 d^2}$	0	
$\frac{3h^3 + 2hd^2}{4d^4}$	0	0	0	$\frac{3h^2}{4d^4}$	

Abb. 14  
Lösung der gegenseitigen Orientierung nach Hallert

Freilich muß man außerdem davon absehen, daß es sich hier nur um eine grobe Linearisierung für Senkrechtaufnahmen handelt. Allerdings ist bei der Lösung der Aufgabe interessant, daß der Lösungsvektor  $A^T L$  eine lineare Funktion der ursprünglichen Beobachtungen  $L$  wird. Somit kann die Inverse des Systems allgemein analytisch durch Multiplikation abgeleitet werden: Wenn  $X = (A^T A)^{-1} A^T L = BL$  ist, dann gilt  $BB^T = (A^T A)^{-1}$ .

Damit ist auch der mittlere Fehler der abgeleiteten Orientierungselemente einer weiteren Fehlerfortpflanzungsberechnung zugänglich (Abb. 15).

Man kann die Anwendung der Ausgleichsrechnung in der Photogrammetrie bis zu diesem Zeitpunkt nach einem damaligen Schweizer Zitat als nicht notwendige Spielerei betrachten. Immerhin ist daran richtig, daß bis dahin die Praxis keinen Schaden davontrug, die Ausgleichsrechnung nicht anzuwenden. Selbst die durch Schermerhorn, Nowatzky, Zarzycki und Brandenberger zur Praxisreife gebrachte komplexe instrumentelle Aerotriangulation im Streifen und im Block reihte die Modelle mechanisch oder rechnerisch ohne Ausgleich aneinander. Der Gesamtverband wurde erst zuletzt so auf die wenigen Paßpunkte bezogen, daß die Diskrepanzen durch graphische und später rechnerische Interpolation mit Polynomen verteilt worden sind. Das sollte sich jedoch bald ändern (Abb. 16).



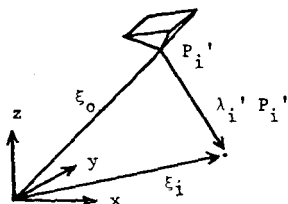
$$\Delta x = a_0 + a_1 x + a_2 ay + a_3 x^2$$

$$\Delta y = b_0 + b_1 x + b_2 xy + b_3 x^2$$

$$\Delta z = c_0 + c_1 x + c_2 xy + c_3 x^2$$

Abb. 15

*Streifen-„Ausgleichung“ der Aerotriangulation*



Für einen Strahl

$$\xi_i = \xi_0 + \lambda_i' A P_i'$$

$$x_i' = -c \frac{(x_i - x_0')a_{11} + (y_i - y_0')a_{21} + (z_i - z_0')a_{31}}{(x_i - x_0')a_{13} + (y_i - y_0')a_{23} + (z_i - z_0')a_{33}}$$

$$y_i' = -c \frac{(x_i - x_0')a_{12} + (y_i - y_0')a_{22} + (z_i - z_0')a_{32}}{(x_i - x_0')a_{13} + (y_i - y_0')a_{23} + (z_i - z_0')a_{33}}$$

$$v_{x_i'} = \frac{\delta x_i'}{\delta \phi} d\phi + \frac{\delta x_i'}{\delta \omega} d\omega + \frac{\delta x_i'}{\delta \kappa} d\kappa + \frac{\delta x_i'}{\delta x_0} dx_0 + \frac{\delta x_i'}{\delta y_0} dy_0 + \frac{\delta x_i'}{\delta z_0} dz_0$$

$$+ \frac{\delta x_i'}{\delta x} dx + \frac{\delta x_i'}{\delta y} dy + \frac{\delta x_i'}{\delta z} dz$$

$$v_{y_i'} = \frac{\delta y_i'}{\delta \phi} d\phi + \frac{\delta y_i'}{\delta \omega} d\omega + \frac{\delta y_i'}{\delta \kappa} d\kappa + \frac{\delta y_i'}{\delta x_0} dx_0 + \frac{\delta y_i'}{\delta y_0} dy_0 + \frac{\delta y_i'}{\delta z_0} dz_0$$

$$+ \frac{\delta y_i'}{\delta x} dx + \frac{\delta y_i'}{\delta y} dy + \frac{\delta y_i'}{\delta z} dz$$

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2$$

Abb. 16  
Bündelblockausgleichung nach H. Schmid

#### 4. Digitale Rechentechnik und Analytische Photogrammetrie

Ein neues Zeitalter in der Photogrammetrie wird durch die digitale Rechentechnik begründet. Helmut Schmid wird als Mitarbeiter der von Peenemünde in die USA gebrachten Wernher von Braun-Mannschaft mit Aufgaben der ballistischen Photogrammetrie betraut. Dabei geht es zunächst um die genaue Bestimmung der Orientierung der ballistischen Kamera und deren Kalibrierung mittels Sternaufnahmen. 3 Parameter der inneren Orientierung (Hauptpunkt und Bildweite), sowie 3 Parameter der äußeren Orientierung (3 Rotationen der Kamera) werden aus überschüssigen Beobachtungen von Bildkoordinaten abgebildeter, und aus Sternkatalogen positionsmäßig bekannter Sterne bestimmt. Die so ermittelte Orientierung ist, wie bei Finsterwalder, Voraussetzung für den räumlichen Vorwärtsschnitt abgebildeter Flugkörper.

Schmid, dessen Dienststelle als erste Zugang zur Entwicklung digitaler Rechenautomaten hat, verwendet diese Rechenhilfsmittel zur Lösung der Aufgabe (Abb. 17).

Schmid ist durch das auf wenige  $\mu\text{m}$  genaue, durch strikte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhaltene Ergebnis so überrascht – es handelt sich immerhin um eine Genauigkeitsverbesserung von einer Größenordnung –, daß er die analytische Photogrammetrie auf ein allgemeines Meßprinzip geometrischer Richtungs-Beobachtungen zurückführt [18].

Auch das Problem der seit von Gruber bekannten Aerotriangulation wird erstmalig nicht mehr als Interpolationsaufgabe, sondern als strenges Ausgleichsproblem formuliert. Dabei ist bezeichnend, daß Schmid auf Grund seiner früheren Erfahrungen in der Rechentechnik bereits auf die Vorteile einer Bandstruktur der in photogrammetrischen Blockausgleichungen enthaltenen Matrizen eingeht. Dabei erleichtert die konsequent erstmals in der Photogrammetrie angewandte Matrizenschreibweise das Verständnis der Aufgabenstellung (Abb. 18).

Das dabei verwendete Boltzsche Entwicklungsverfahren und die daraus abgeleitete rekursive Partitionierung sind klar ersichtlich. Schmid wurde es allerdings nicht vergönnt, die Programmierung dieses allgemeinen Problems der Luftphotogrammetrie zu vollenden. Vielmehr blieb er bei der ballistischen Aufgabenstellung.

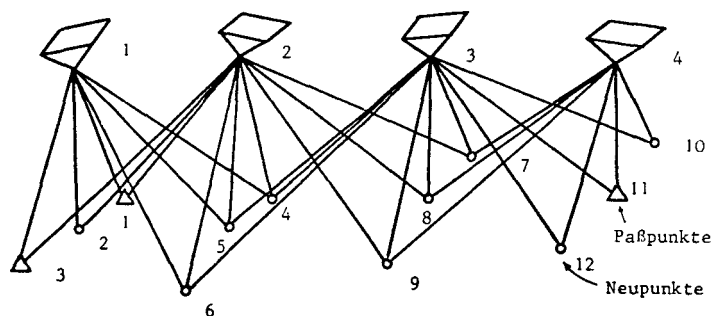
Als im Jahre 1957 der erste sowjetische Satellit Sputnik die Erde umkreiste, wurde in den USA sofort der Drang nach eigenen Erdsatelliten und nach Raumfahrt laut. Als sich der damalige US Coast and Geodetic Survey unter Auftrag im Jahre 1965 entschloß, ein geodätisches Weltnetz mit Hilfe von Erdsatelliten zu bestimmen, wurde H. Schmid für diese Aufgabe verpflichtet und mit ihrer wissenschaftlichen Durchführung betraut. In den nachfolgenden 7 Jahren entwickelt Schmid die in der ballistischen Photogrammetrie entstandene Aufnahmemethode bewegter Objekte zur Perfektion. Die Ausgleichung des Weltnetzes erbrachte mittlere Punktfehler von  $\pm 5\text{ m}$ .

Während Schmid sich mit den Problemen der Weltnetzausgleichung auseinandersetzte, war es seinen Mitarbeitern Duane Brown und Carper Tewinkel vergönnt, die Lösung der allgemeinen photogrammetrischen Aufgabe angewandt auf die Luftphotogrammetrie zu programmieren.

Duane Brown, der wie Schmid von der Zukunft des Großrechners überzeugt war, sagt von Schmid [19]:

„Although others might harken to von Gruber or even to Finsterwalder, in my view the proximate origin of the bundle method can most properly be ascribed to Schmid's now classic paper ‚An Analytical Treatment of the Orientation of a Photogrammetric Camera‘ published in October 1953 ... Using the collinearity equations, as they are now called, Schmid developed the rigorous least squares adjustment of plate coordinates defining a bundle of rays from image points to specified control points. The adjustment entailed the formation of a system of normal equations leading to the direct recovery of the unknown elements of orientation of the photogrammetric camera.“

Dabei ist nicht zu verkennen, daß Brown als mathematischer Mitarbeiter von Schmid dazu beigetragen hat, die Matrizenschreibweise in die Photogrammetrie einzuführen [20] (Abb. 19).



i Punkte 12  
j Aufnahmen 4  
n Punkte pro Modell 6  
s Streifen 1  
k Strahlen 30

$$i = 3j - (s - 1)$$

$$k = j \times \frac{3}{2} n - 6s$$

für  $n = 6$

$$k = j \times 9 - 6s$$

$$P_1 \mid v_1 = A_1 x_1 + A_2 x_2 - L_1 \equiv \text{alle Punkte}$$

$$\begin{array}{ccc} 2k & (2k, 6j)6j & (2k, 3i)3i \\ 60 & (60, 24)24 & (60, 36)36 \end{array} \quad 2k \quad 60$$

$$P_2 \mid v_2 = A_2 x_2 - w_2 \equiv \text{alle Paßpunkte}$$

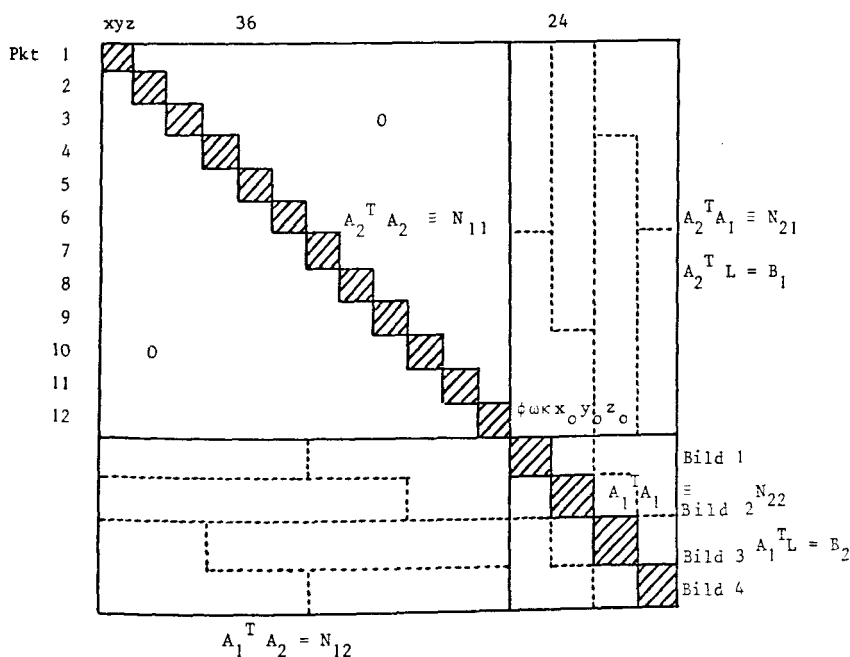
$P_2 \text{ z. B. } \rightarrow \infty$

Abb. 17

Bündelblockausgleichung nach Schmid

Ferner formulierte er die Auflösung der photogrammetrischen Aufgabe allgemein, wobei pro Aufnahmeort insgesamt 9 Parameter (6 der äußeren und 3 der inneren Orientierung) angesetzt wurden. Selbstverständlich ergab sich dabei eine Instabilität des Gleichungssystems, die aber eliminiert werden konnte durch Hinzufügung zusätzlicher Beobachtungsgleichungen mit entsprechenden Gewichten.

Duane Brown schreibt schon 1955: „It is important to distinguish between a least squares adjustment and a least squares solution. Once a given problem has been explicitly formulated and the quantities to be adjusted have been specified together with their variances and covariances there exists only one rigorous least squares adjustment. A least squares solution is a method for accomplishing the adjustment. For a given problem an infinite number of least squares solutions are theoretically possible



$$x_2 = N_{11}^{-1} (B_1 - N_{12} A_1) \quad 12 \text{ mal } 3 \times 3$$

$$x_1 = N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} (B_2 - N_{21} N_{11}^{-1} B_1)$$

$$1 \text{ mal } 24 \times 24$$

oder rekursiv in  $12 \times 12$

Abb. 18  
Bündelblockausgleichung



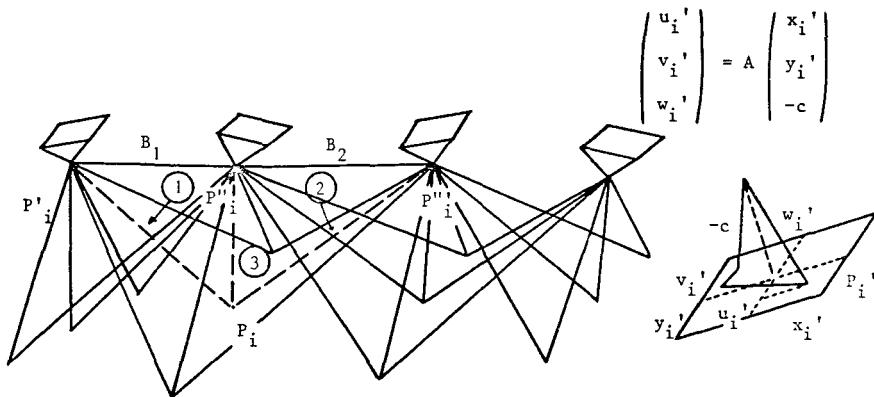
according to the various equivalent forms the mathematical model can assume. Thus in constructing the specific mathematical model to be employed one can introduce parameters or eliminate parameters and one can modify any particular model indefinitely simply by manipulating the condition equations. Since all mathematically equivalent models lead to a unique rigorous least squares adjustment, it is in the formulation of the mathematical model that one can exercise ingenuity and it is from there that various least squares solutions, ranging from the elegant to the inept, spring forth."

Nach diesen theoretischen Erkenntnissen dauerte es immerhin noch einige Jahre, bis die ersten strengen Blockausgleichsprogramme für luftphotogrammetrische Aufgaben größeren Stils verfügbar waren:

Erst 1966 gelang D. Brown und seiner Firma DBA die simultane Ausgleichung eines Blocks von 120 Aufnahmen. Dabei handelte es sich um die Partitionierte Auflösung eines Gleichungssystems von 1500 Unbekannten, welches von ihm seinerzeit noch mit iterativen Methoden gelöst wurde (Abb. 20).

Bildkoordinaten					
$P_1$		$V_1 = A_1 X_1$	+ $A_2 X_2$	+ $A_3 X_3$	- $L_1$
		Orientie- rungs- parameter	Punkt- koord.	Innere Orientie- rungs- parameter	Beob- achtung
		$\phi, \omega, \kappa$ $x_o, y_o, z_o$	$x, y, z$	$x_H', y_H', c$	$x', y'$
Paßpunkte oder Strecken					
$P_2$		$V_2 =$	$A_2 X_2$		- $W_2$
			gen. Koord.		
			$x, y, z$ od. Strecke $s$		$x, y, z$ $s$
Fingierte Beobachtungen					
$P_3$		$V_3 =$		$A_3 X_3$	- $W_3$
				gen. bekannte Werte von $x_H', y_H', c$	$x_N', y_N'$
bekannte Orientierungsparameter oder deren Differenzen					
$P_4$		$V_4 = A_4 X_1$			- $W_4$
		$\phi, \Delta\phi, \Delta z_o, \dots$			$\phi, \Delta\phi, \Delta z_o, \dots$

Abb. 19  
Duane Brown



Komplanaritätsgleichung (nach Schut)

$$\textcircled{1} \quad B_1 \times p_i' \cdot p_i'' = 0 ; \quad \begin{vmatrix} bx_1 & by_1 & bz_1 \\ u_i' & v_i' & w_i' \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad B_2 \times p_i'' \cdot p_i''' = 0 ; \quad \begin{vmatrix} bx_2 & by_2 & bz_2 \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \\ u_i''' & v_i''' & w_i''' \end{vmatrix} = 0$$

Maßstabsgleichung (Raytheon)

$$\textcircled{3} \quad \lambda_i'' - \lambda_i''' = 0 ; \quad \begin{vmatrix} bx_2 & u_i''' \\ by_2 & v_i''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_i' - u_i'' \\ v_i' - v_i'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_i' & bx_1 \\ v_i' & by_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_i'' & u_i''' \\ v_i'' & v_i''' \end{vmatrix} = 0$$

Linearisiert

$$b_1 v_{x_i}' + b_2 v_{y_i}' + b_3 v_{x_i}'' + b_4 v_{y_i}'' = a_1 d\phi + a_2 d\omega + a_3 d\kappa + a_4 dx_0 + a_5 dy_0 + a_6 dz_0 + | \text{Det}_{\text{gen.}} |$$

$$P_1 \mid \underline{B_1 v_1 = A_1 x_1 - L_1}$$

$$P_2 \mid \underline{v_2 = A_1 x_1 + A_2 x_2 - L_2} \quad \text{nur für Paßpunkte}$$

$$P_3 \mid \underline{v_3 = A_1 x_1 - w_3} \quad \text{nur für Orientpar. (bek.)}$$

$$\underline{X = A^T (BP^{-1} B^T)^{-1} A^{-1} A^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W}$$

Abb. 20

Raytheon-Blockausgleich mit Bedingungen

Etwa zur gleichen Zeit gelang der Firma Raytheon unter Fred Doyle die Lösung des photogrammetrischen Problems gleicher Blockgröße mit Bedingungsgleichungen der Komplanarität und des Maßstabs für die US-Armee und die N.A.S.A. In diesem System brauchten keine Übertragungspunktkoordinaten ausgeglichen zu werden. Folglich entfiel auch die Berechnung ihrer Näherungen, welche besonders auf der Mondoerfläche problematisch war. Die Lösung entsprach der Formulierung der gegenseitigen Orientierung mit Maßstabsanschluß, welche durch Bedingungsgleichungen mit Unbekannten gelöst werden kann.

Gegen die mit Großrechnern von militärischer Seite und von Seiten der Raumfahrt unterstützten Versuche von DBA und Raytheon war kaum zu konkurrieren (Abb. 21).

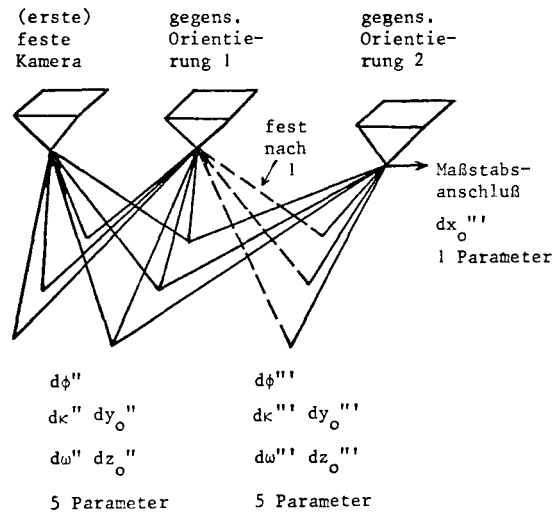
G. Schut, der sich seit Mitte der fünfziger Jahre am National Research Council in Kanada mit der analytischen Aerotriangulation befaßte [21] und C. Tewinkel vom US Coast and Geodetic Survey [22] hatten nur Kleinrechner vom Typ Ferranti Ferut und IBM 1620 zur Verfügung. Deshalb befaßten sich beide mit der analytischen Rekonstruktion analoger Aerotriangulationsverfahren, welche Modell für Modell durch Folgebilder oder durch Zusammenschluß von Bildtripeln aneinanderfügten. Streifen- und Blockinterpolationsverfahren besorgten den Anschluß an die Paßpunkte.

Die unentgeltliche Zurverfügungstellung ihrer dokumentierten Programme konnte darüber jedoch nicht hinwegtäuschen, daß sie gegenüber den strengen Lösungen von DBA und Raytheon nur mit stark verminderter Genauigkeit arbeiteten. Immerhin kann man diese genäherten Verfahren aber zur Berechnung von Näherungswerten für eine strenge Ausgleichung benutzen.

Als ich mich, nach meiner Dissertation auf dem Gebiete der Aerotriangulation im Jahre 1959, Anfang der sechziger Jahre entschloß, auf dem Sektor der analytischen Aerotriangulation zu arbeiten, stand auch mir nur eine IBM 1620 zur Verfügung. 1966 lernte ich bei einem Forschungsaufenthalt bei der N.A.S.A. das Raytheonprogramm kennen und wurde sogleich in meinen Bestrebungen entmutigt. Hätte ich die gleiche Zähigkeit wie F. Ackermann, G. Lehmann und Halonen in Finnland und deren Schüler besessen, hätte ich die Früchte meiner analytischen Bemühungen ernten können. So aber sah ich mich außerstande, eine Programmentwicklung von etwa 20 Mannjahren zu reproduzieren. Was ich allerdings übersehen hatte war, daß die Programme von DBA und Raytheon mit erheblichen finanziellem Aufwand für militärische und raumfahrt-technische Zwecke geliefert wurden, und daß der zivile photogrammetrische Sektor an diesen frühzeitigen phänomenalen Entwicklungen kaum beeinflußt war und beeinflußt werden sollte.

Während meine Studenten in Fredericton in Kanada in mühevoller Weise die Programme von Raytheon und Tewinkel auf der IBM 1620 und später auf der IBM 360/50 zu installieren versuchten, vollzog sich in Stuttgart, in Hannover und in Helsinki eine Neugeburt der zivilen photogrammetrischen Aerotriangulation.

Schon vor Vorhandensein adäquater Rechner beschäftigten sich in Europa Rinner [23], Thompson [24] und Masson d'Autume [25] mit der theoretischen Aufbereitung analytisch photogrammetrischer Aufgaben.



## BILDTRIPELORIENTIERUNG

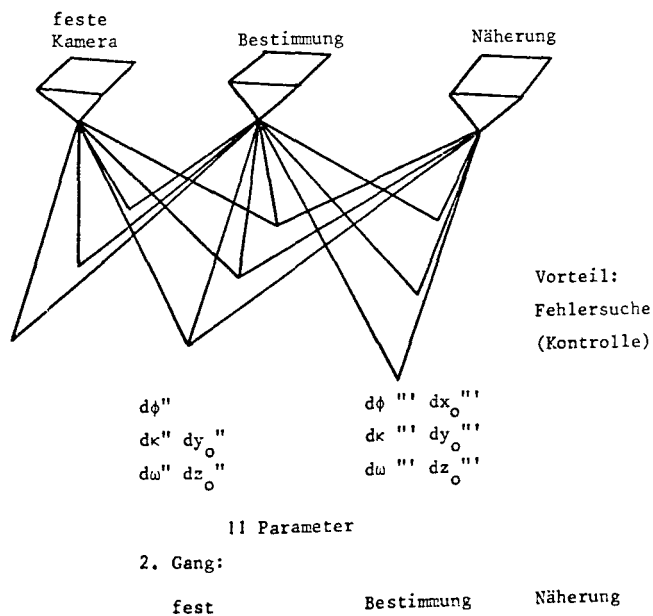


Abb. 21  
 Folgebildanschluß (Schut)

Thompsons sarkastische Bemerkungen besagen zwar, daß es zwar paradox, jedoch kein Zufall ist, daß frühe digitale Methoden mit angelsächsischen Ländern verbunden waren. Es ist paradox, weil in ihrer Gesamtheit die Angelsachsen bei ihrem Beitrag zu Wissenschaft und Technologie nie die Arbeit geliebt hätten. Sie würden im Gegenteil oft große Anstrengungen unternommen haben, um sie zu vermeiden. Während in Deutschland um 1909 die Idee der mühevollen analytischen Photogrammetrie verlassen wurde, begann ihre Blüte dann in England.

Wie dem auch sei, so hat Thompson seine großen Verdienste bei der numerischen Vereinfachung der analytischen Berechnungsverfahren. Wir verdanken Rinner die klare theoretische Darstellung analytischer Probleme.

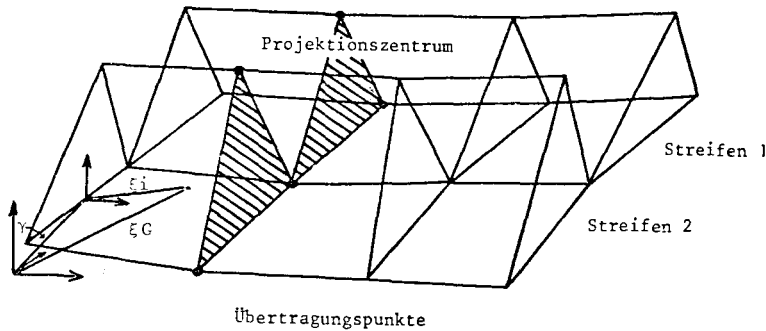
Die strenge Lösung photogrammetrischer Aufgaben großen Stils wurde in Deutschland mit durchgreifendem Erfolg durch Fritz Ackermann eingeleitet (Abb. 22). Im Gegensatz zu Schmid und zu Brown besaß er die Genialität, seine Aerotriangulationsausgleichung auf dem Modell als Einheit aufzubauen. Dabei weiß man, daß Modellkoordinaten in 90% der praktischen Fälle im Analoggerät gemessen werden, weil eben Analoggeräte weit verbreitet sind. Nur 10% der praktischen Aerotriangulation kann am Stereokomparator gemessen werden, weil er nicht überall vorhanden ist. Trotzdem ermöglicht die Stereokomparatormessung auch eine Modellberechnung durch gegenseitige Orientierung und Vorwärtsschnitt, sowie die nachfolgende Blockausgleichung nach der Modellmethode. Diese Idee führte unstrittig zu weltweitem Erfolg bei der Einführung der Aerotriangulationsausgleichung. Dies umso mehr, als es durch die simultane Blockausgleichung erstmals möglich wurde, Genauigkeiten von  $\pm 10 \mu\text{m}$  bezogen auf das Bild statt  $\pm 30 \mu\text{m}$  und mehr zu erreichen (Abb. 23).

Während die Blockausgleichung mit Modellen an sich 7 Orientierungsparameter pro Modell und 3 Koordinatenparameter pro Übertragungspunkt, einschließlich der Perspektivzentren erfordert, so gelang es Ackermann und Ebner, die Lösung iterierend in eine für den Rechner sehr schnelle Version aufzuspalten: Dabei wird wechselnd die Lage mit je 4 Orientierungsparametern und je 2 Übertragungspunktparametern, sowie die Höhe mit je 3 Orientierungsparametern und je 3 Übertragungspunktparametern einschließlich der Perspektivzentren ausgeglichen [26], [27], (Abb. 24).

Doch auch der Bündelmethode war im zivilen Bereich unter Gerhard Lehmann und unter Halonen der Weg offen. In Hannover erstellten Jürgen Müller und Hans Bauer Rechenprogramme zur Lösung der photogrammetrischen Aufgabe [28]. Ihr Verdienst ist die nach Vorschlägen von Duane Brown eingeführte Ausgleichung mit zusätzlichen Parametern.

Die Ausgleichung mit zusätzlichen Parametern der Affinität, der Scherung und der symmetrischen sowie asymmetrischen Verzeichnung erhöhte mit einem Mal die photogrammetrische Meßgenauigkeit um den Faktor 2. Statt  $\pm 15 \mu\text{m}$  wurden nur  $\pm 5 \mu\text{m}$  erreicht. Dies wurde auf dem Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Ottawa 1972 offenkundig. Duane Brown schreibt hierüber [19]:

„At the Congress I was quite frankly surprised at the presentation of a most significant paper entitled ‚Bundle Adjustment with Additional Parameters‘ by Bauer and



$$\xi_{i_G} = \lambda \cdot A \cdot \xi_i + \gamma$$

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \lambda \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix}$$

 $A_2 \quad X_3$ 

$$\begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{pmatrix}$$

 $A_1 \quad X_1$ 

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta X_i}{\delta \lambda} d\lambda + \frac{\delta X_i}{\delta X_o} dX_o + \frac{\delta X_i}{\delta Y_o} dY_o + \frac{\delta X_i}{\delta Z_o} dZ_o + \frac{\delta X_i}{\delta \phi} d\phi + \frac{\delta X_i}{\delta \Omega} d\Omega + \frac{\delta X_i}{\delta \kappa} d\kappa \\ \frac{\delta Y_i}{\delta \lambda} d\lambda + \frac{\delta Y_i}{\delta X_o} dX_o + \frac{\delta Y_i}{\delta Y_o} dY_o + \frac{\delta Y_i}{\delta Z_o} dZ_o + \frac{\delta Y_i}{\delta \phi} d\phi + \frac{\delta Y_i}{\delta \Omega} d\Omega + \frac{\delta Y_i}{\delta \kappa} d\kappa \\ \frac{\delta Z_i}{\delta \lambda} d\lambda + \frac{\delta Z_i}{\delta X_o} dX_o + \frac{\delta Z_i}{\delta Y_o} dY_o + \frac{\delta Z_i}{\delta Z_o} dZ_o + \frac{\delta Z_i}{\delta \phi} d\phi + \frac{\delta Z_i}{\delta \Omega} d\Omega + \frac{\delta Z_i}{\delta \kappa} d\kappa \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\delta X_i}{\delta x_i} v_{x_i} + \frac{\delta X_i}{\delta y_i} v_{y_i} + \frac{\delta X_i}{\delta z_i} v_{z_i} \\ \frac{\delta Y_i}{\delta x_i} v_{x_i} + \frac{\delta Y_i}{\delta y_i} v_{y_i} + \frac{\delta Y_i}{\delta z_i} v_{z_i} \\ \frac{\delta Z_i}{\delta x_i} v_{x_i} + \frac{\delta Z_i}{\delta y_i} v_{y_i} + \frac{\delta Z_i}{\delta z_i} v_{z_i} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$$

BV L

$$\underline{BV} = \underline{A_1 X_1} + \underline{A_2 X_2} - \underline{L}$$

bei "Quasi-Beobachtungen"  $P_1 \mid V = AX - L$

$$(60, 108) \mid 108 = (60, 42) \mid 42 + (60, 60) \mid 60 \div 60$$

$P_2 \mid V = A_2 X - W$  für Paßpunkte

Abb. 22

Blockausgleichung mit Modellen nach Ackermann

Zerlegung in Anblock - Höhenblock (iterativ)  
(nach Ebner)

Anblock: (Formelierung nach Wrobel)

$$\begin{array}{l|l} P_i & v_{X_i}^{**} = \underline{a}x + \underline{b}y + \underline{dX}_0 - \lambda (a_{11}x + a_{12}y) + X_{i \text{ gen. o.P.P.}} + \underline{dX}_i \\ \text{od.} & \\ P.P. & v_{Y_i}^{**} = \underline{b}x + \underline{a}y + \underline{dY}_0 - \lambda (a_{11}x + a_{22}y) + Y_{i \text{ gen. o.P.P.}} + \underline{dY}_i \end{array}$$

Höhenblock:

$$\begin{array}{l|l} P_i & v_{X_i}^{**} = - \underline{c} \cdot z - \lambda (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_{i \text{ gen. o.P.P.}} + \underline{dX}_i \\ \text{od.} & v_{Y_i}^{**} = \underline{d} \cdot z - \lambda (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_{i \text{ gen. o.P.P.}} + \underline{dY}_i \\ P.P. & v_{Z_i}^{**} = \underline{c} \cdot x - \underline{d} \cdot y + \underline{dZ}_0 - \lambda (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{i \text{ gen. o.P.P.}} + \underline{dZ}_i \end{array}$$

Abb. 23  
Modellblockausgleichung

Müller. I had known that European progress with the practice of bundle adjustment was by then mostly well beyond the experimental stage. On the other hand, I did not expect progress to be so rapid as to embrace the practical implementation of the bundle adjustment with self-calibration. Yet this is precisely what was accomplished by Bauer and Müller. The significance lay not so much in the program itself but rather in the results of its actual application to the Oberschwaben test block.

In that project Bauer and Müller demonstrated that by virtue of self-calibration truly amazing accuracies of triangulation could be achieved."

Die Lageverbesserung durch Selbstkalibrierung war über 300%; die Höhenverbesserung über 50%.

Kein Wunder also, daß sich auch Ackermanns Mitarbeiter, namentlich Ebner, bemühten, zusätzliche Parameter in die Modellausgleichung einzuführen. Auch Gotthardt schloß sich diesem Trend mit Erfolg an.

Die Ausweitung der Bündel- wie auch der Modellblockausgleichung fand seit Anbeginn theoretisch und praktisch auf die Einbeziehung zusätzlicher Beobachtungen oder Bedingungen statt (Abb. 25).

Bereits 1960 führte Case in den USA die Behandlung zusätzlicher Bedingungen allgemein in die Aerotriangulationsausgleichung ein [29].

H. Schmid zeigte 1964, daß alle in der Photogrammetrie anwendbaren Beobachtungen und Bedingungen als allgemeiner Fall der Helmertschen Ausgleichung betrachtet werden können.

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 - L$$

Orientierung	Punkte	zusätzl. Parameter
$\omega \ \phi \ \kappa \ x_o \ y_o \ z_o$	$x \ y \ z$	Affinität
		Scherung
		symmetr. Verzeichnung
		asymmetr. Verzeichnung

## Normalgleichungen

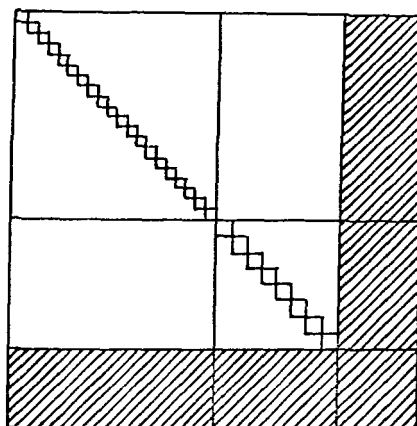


Abb. 24

Bündelausgleichung mit zusätzlichen Parametern

D. Brown wendet das Prinzip 1966 in seinen photogrammetrischen Programmen für die Einbeziehung von Satellitenbahndaten an.

Auch in Deutschland werden diese Prinzipien angewandt: Kraus führt gemessene Nachbarstrecken im Stereomodell mit in die Ausgleichung ein. Somit können Spannmäße von Meßbandlänge, welche höhere Nachbargenauigkeit als die photogrammetrische Messung besitzen, festgehalten werden.

Die wohl signifikanteste Anwendung dieser Art wurde beim Internationalen Kongreß in Helsinki 1976 von Ackermann vorgelegt. Bei Einbeziehung von Statoskopdaten in die Modellblockausgleichung konnte Ackermann nachweisen, daß selbst große Blöcke von bis zu 2000 Modellen darauf verzichten können, Höhenpaßpunkte in der Mitte des Blockes zu bestimmen, eine phänomenale Feststellung. Obwohl lediglich Perimeterpaßpunkte vorhanden waren, konnte im Gesamtblock die erwartete Bestimmungsgenauigkeit wie im Einzelmodell erreicht werden. Dies war ohne Statoskopdaten bislang nur für die Lage nachgewiesen worden; die Höhe aber erforderte zur Einhaltung der notwendigen Genauigkeit erhebliche Paßpunktarbeiten.



ZUSÄTZLICHE BEDINGUNGEN ( $P = \infty$ )(ODER BEOBSACHTUNGEN ( $P = P_i$ ))

## 1) Orientierungsdaten

$$x_o \ y_o \ z_o \ \omega \ \phi \ \kappa \quad (\text{Hifix, Kreisel})$$

## 2) Differenzen von Orientierungsdaten

$$\Delta\phi = \phi'' - \phi'$$

$$\Delta\omega = \omega'' - \omega' \quad (\text{Horizontkamera})$$

$$\Delta\kappa = \kappa'' - \kappa'$$

$$z_o'' - z_o' = \Delta bz \quad \underline{\text{Statoskop}}$$

$$\left. \begin{aligned} x_o'' - x_o' &= \Delta bx \\ y_o'' - y_o' &= \Delta by \end{aligned} \right\} \sqrt{\Delta bx^2 + \Delta by^2}$$

## 3) Höhendifferenzen

$$z_2 - z_1 = \Delta z_{12} = 0 \quad \underline{\text{Seeufer}}$$

## 4) Strecken

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \Delta d_{12} \quad \underline{\text{Horizontalstr.}}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \Delta s_{12} \quad \underline{\text{Raumstrecke}}$$

## 5) Richtung

$$\text{tg } \alpha_{21} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## 6) Winkel

$$\alpha_{31} - \alpha_{21} = \text{arc tg } \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \text{arc tg } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## 7) Passpunkte

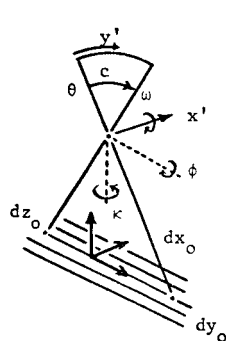
$$x, y, z$$

Abb. 25

Zusätzliche Bedingungen ( $P = \infty$ ) (oder Beobachtungen [ $P = P_i$ ])

Schließlich wird es möglich, terrestrisch-geodätische Messungen mit photogrammetrischen Bildkoordinatenmessungen zu vereinen. Wong in den USA hat bereits ein solches Rechenprogramm erstellt [32]. Es erlaubt allerdings keine Bandstruktur-reduzierung, da die Normalgleichungsmatrix voll ist. Unter Umständen könnten bei solchen Anwendungen Sortieralgorithmen von Nutzen sein.

Ein weiteres Anwendungsgebiet hierfür ist speziell in der terrestrischen Photogrammetrie gegeben. Hier wird die Bündelausgleichung unter Einbeziehung geodätischer Daten bald Hervorragendes leisten können (Abb. 26).



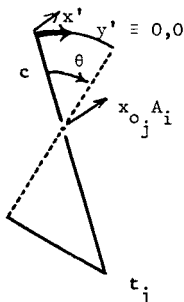
a) genäherte Beziehungen

$$\begin{aligned} x_i' &= \frac{c}{z_o - z_i} x_i \\ y_i' &= \arctan \frac{y_i}{z_o - z_i} \end{aligned}$$

b) Differentialbeziehungen

$$\begin{aligned} dx_i &= y_i d\kappa + (z_o - z_i) d\phi + dx_o \\ dy_i &= \frac{y_i}{z_o - z_i} dz_o - (z_o - z_i) \left[ 1 + \frac{y_i^2}{(z_o - z_i)^2} \right] d\omega + dy_o \end{aligned}$$

c) Kollinearitätsgleichungen



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \frac{B}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot A_j \cdot \begin{pmatrix} x - x_{o_j} \\ y - y_{o_j} \\ z - z_{o_j} \end{pmatrix}$$

$B = \text{"squint matrix"} = f(\phi)$

$A = \text{Drehmatrix} = f_1 \dots f_9(\omega_j, \phi_j, \kappa_j)$

$\omega_j, \phi_j, \kappa_j, x_{o_j}, z_{o_j} = f_{10} \dots f_{15}(t_j)$

Abb. 26  
Geometrische Aufgaben der Fernerkundung

## 5. Analytische Behandlung geometrischer Aufgaben der Fernerkundung

Ein neues photogrammetrisches Betätigungsfeld ist die Lösung der Geometrie von Fernerkundungsaufnahmen [32]. Anders als bei klassischen photogrammetrischen Aufgaben, wo alle Aufnahmen unabhängig von der Zeit in 3 Dimensionen betrachtet werden konnten, ist die Lösung der Fernerkundungsgeometrie eine von der Zeit abhängige 4-dimensionale Aufgabe. Die Abtasteraufnahme erzeugt nämlich jeweils ein Linienbild, welches über eine endliche Zeit durch Fortbewegung der Sensorplattform zum flächenhaften Bild integriert wird. Nur wenn die äußere Orientierung gegeben ist, kann die Geometrie des Fernerkundungsbildes an Hand eines anderweitig verfügbaren digitalen Geländemodells (aus Karten oder klassisch photogrammetrisch) eindeutig bestimmt werden (Abb. 27).

Die Bestimmung der äußeren Orientierung ist ein Filterungsproblem, welches nur durch Anwendung der Ausgleichsrechnung gelöst werden kann [34].

Dowideit hat so in Hannover die strenge Auswertung von Radaraufnahmen gelöst, und Bähr die von Satellitenabtaster-Aufnahmen [35], [36].

Die Orientierungsparameter sind als Fourierfunktionen der zeitabhängigen Bildkoordinate  $x'$  ausdrückbar. Zusammen mit den Kollinearitätsgleichungen für die Paßpunkte ergeben sich zwei Arten von Fehlergleichungen (Abb. 28). Der erste Typ enthält die Koeffizienten der Fourierreihen für die Orientierungsparameter und die Paßpunktverbesserungen. Der zweite Typ besteht aus fingierten Beobachtungen für beliebige  $x'$ -Werte entlang des Flugweges. Der dritte Typ besteht aus Paßpunktgleichungen (Abb. 29).

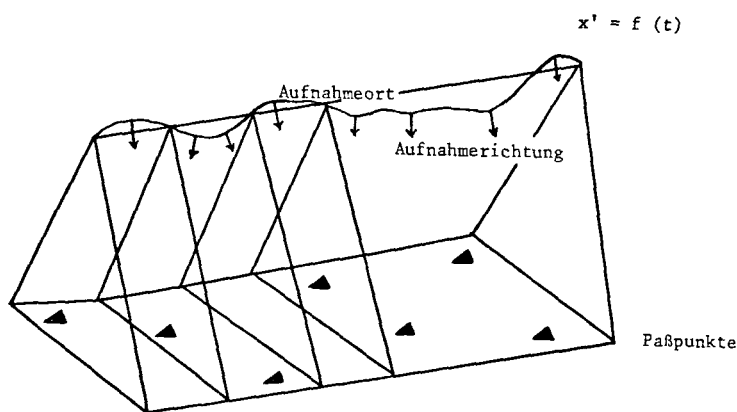
Das Problem der Lösung ist die richtige Gewichtung der fingierten Fehlergleichungen. Ohne sie wäre das Problem instabil. Durch Inversion der Matrix lassen sich aber die Varianzen der Unbekannten  $x_0$  bis  $x_n$  finden. Ihre Inverse aber gibt neue, verbesserte Gewichte für die fingierten Fehlergleichungen und somit eine konvergierende Lösung für die Orientierungsparameter dynamischer Aufnahmen.

## 6. Zusammenfassung

Zusammenfassend kann man wohl bemerken: Die Photogrammetrie hat seit Anfang mit der Lösung geometrischer Probleme zu kämpfen gehabt, welche die der Geodäsie um mindestens eine Größenordnung überschritten haben. Deshalb mußte die konsequente Anwendung der Ausgleichsrechnung auf komplexe photogrammetrische Probleme solange auf sich warten lassen, bis genügend große Rechenanlagen zur Verarbeitung zur Verfügung standen.

Dafür gelang es dann in der analytischen Photogrammetrie recht früh, mit Problemen großer Datenmengen, bezogen auf Sortiervorgänge und die Reduktion auf Bandstrukturen, fertig zu werden. Die konsequente Anwendung der Ausgleichsrechnung erlaubte es, nicht nur die erreichte Genauigkeit wesentlich um fast eine Größenordnung zu verbessern; sie konnte auch benutzt werden zur statistischen Untersuchung der Fehlerquellen und zur Kalibrierung des Meßsystems.

Aufbauend auf Carl Friedrich Gauß ist so die Photogrammetrie zur exakten Meßmethode geworden.



Ansatz für die Orientierungsparameter:

$$x_o = x_{o_{gen}} + a_o + a_1 \cos \frac{x'}{x'_m} + a_2 \sin \frac{x'}{x'_m} + a_3 \cos \frac{2x'}{x'_m} + a_4 \sin \frac{2x'}{x'_m} + \dots$$

$$y_o = y_{o_{gen}} + b_o + \dots + b_4 \sin \frac{2x'}{x'_m}$$

$$z_o = z_{o_{gen}} + c_o + \dots + c_4 \sin \frac{2x'}{x'_m}$$

$$\omega = \omega_{gen} + d_o + \dots + d_4 \sin \frac{2x'}{x'_m}$$

$$\phi = \phi_{gen} + e_o + \dots + e_4 \sin \frac{2x'}{x'_m}$$

$$\kappa = \kappa_{gen} + f_o + \dots + f_4 \sin \frac{2x'}{x'_m}$$

Kollinearitätsgl.

$$x_i' = 0 = -c \frac{a_{11j}(x_i - x_{oj}) + a_{21j}(y_i - y_{oj}) + a_{31j}(z_i - z_{oj})}{(a_{13j} \sin \theta_j + a_{13j} \cos \theta_j)(x_i - x_{oj}) + \dots}$$

$$y_i' = 0 = -c \frac{(a_{12j} \cos \theta_j - a_{13j} \sin \theta_j)(x_i - x_{oj}) + \dots}{(a_{13j} \sin \theta_j + a_{13j} \cos \theta_j)(x_i - x_{oj}) + \dots}$$

Abb. 27

Bestimmung der äußeren Orientierung dynamischer Aufnahmesysteme

Fehlergleichungen vom Typ I

$$\begin{aligned}
 v_{x_i}' &= \frac{\delta x_i'}{\delta x_o} \cdot a_o + \frac{\delta x_i'}{\delta x_o} \cdot \cos \frac{x_i'}{x_m} \cdot a_1 + \dots \dots + \frac{\delta x_i'}{\delta z_i} dz_i \dots \\
 &\quad \dots \frac{\delta x_i'}{\delta \kappa} \cdot \sin \frac{2x_i'}{x_m} \cdot f_4 + \dots \dots - (x_i'_{\text{gem}} - x_i'_{\text{ger}}) \\
 v_{y_i}' &= \frac{\delta y_i'}{\delta x_o} \cdot a_o + \frac{\delta y_i'}{\delta x_o} \cdot \cos \frac{x_i'}{x_m} \cdot a_1 + \dots \dots + \frac{\delta y_i'}{\delta z_i} dz_i \dots \\
 &\quad \dots \frac{\delta y_i'}{\delta \kappa} \cdot \sin \frac{2x_i'}{x_m} \cdot f_4 + \dots \dots - (y_i'_{\text{gem}} - y_i'_{\text{ger}})
 \end{aligned}$$

Fehlergleichungen vom Typ II - fingiert

$$\begin{aligned}
 v_{x_o} &= \underline{a_o} + \cos \frac{x'}{x_m} a_1 + \dots \sin \frac{2x'}{x_m} a_4 + \dots \\
 v_{y_o} &= b_o + \cos \frac{x'}{x_m} b_1 + \dots \sin \frac{2x'}{x_m} b_4 + \dots \\
 v_{z_o} &= c_o + \cos \frac{x'}{x_m} c_1 + \dots \sin \frac{2x'}{x_m} c_4 + \dots \\
 v_{\omega} &= d_o + \cos \frac{x'}{x_m} d_1 + \dots \sin \frac{2x'}{x_m} d_4 + \dots \\
 v_{\phi} &= e_o + \cos \frac{x'}{x_m} e_1 + \dots \sin \frac{2x'}{x_m} e_4 + \dots \\
 v_{\kappa} &= f_o + \cos \frac{x'}{x_m} f_1 + \dots \sin \frac{2x'}{x_m} f_4 + \dots
 \end{aligned}$$

$$P_{x'y'} \mid v_{x'y'} = A_1 X_1 + \underline{A_2 X_2} - L_{x'y'} \quad \text{Typ 1}$$

$$P_{x_o \dots k} \mid v_{x_o \dots k} = \underline{B_1 X_1} - L_{x_o \dots k} \quad \text{Typ 2}$$

$$P_{xyz} \mid v_{xyz} = A_2 X_2 - L_{xyz} \quad \text{Typ 3 Paßpunkte}$$

Abb. 28

Ausgleichung der äußeren Orientierung dynamischer Aufnahmesysteme

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \quad P \mid \quad V = AX - L \\
 \downarrow \\
 X = (A^T PA)^{-1} A^T PL \\
 \downarrow \\
 \sigma_X^2 = (A^T PA)^{-1} \sigma_0^2 \\
 \downarrow \\
 \sigma_0^2 = \frac{V^T PV}{n - u} \\
 \downarrow \\
 P_{x_{o\dots k}} = \frac{1}{\sigma_{x_{o\dots k}}}
 \end{array}$$

Iteration

Abb. 29

*Ausgleichung der äußeren Orientierung dynamischer Aufnahmesysteme***Literatur**

- [1] Lambert: „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung“, Band I, Berlin 1765, S. 424 (Artikel „Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche“).
- [2] A. Galle: „Über die geodätischen Arbeiten von Gauß“, Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften 1924.
- [3] S. Finsterwalder: „Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VI 2, Leipzig 1899, S. 1–41.
- [4] S. Finsterwalder: „Über die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen“, Sitzungsberichte der mathemat.-phys. Klasse der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1900, Bd. XXX, Heft II, S. 149–164.
- [5] S. Finsterwalder: „Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen“, Abh. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. II. Kl. XXII, Bd. II, Abt. 1903, S. 225–260.
- [6] H. Schröter: „Theorie der Oberflächen 2. Ordnung“, Leipzig 1880, S. 377 und 384.
- [7] F. Manek: „Pulfrich und der erste Stereoaufnahm. Mod. 1908“, Jenaer Jahrbuch 1958 II.
- [8] von Orel: in Mitt. MGI 1910, Band XXX, S. 67–71.
- [9] T. Scheimpflug: „Die Verwendung des Skioptikons zur Herstellung von Karten und Plänen aus Photographien“, Photographische Korrespondenz 1898, S. 114–121.
- [10] M. Gasser: „Die Eroberung des Luftraumes für die Kartographie durch die Aerophotogrammetrie“, Selbstverlag München 1953.
- [11] P. Gast: „Vorlesungen über Photogrammetrie“, Leipzig 1930.
- [12] O. von Gruber: „Ferienkurs in Photogrammetrie“, Wittwer Verlag, Stuttgart 1930.

- [13] M. Zeller: „Lehrbuch der Photogrammetrie“, Zürich 1947, Orell Füssli Verlag.
- [14] A. Brandenberger: „Fehlertheorie der äußeren Orientierung von Steilaufnahmen“, Dissertation, Zürich 1947.
- [15] B. Hallert: „Über die Herstellung photogrammetrischer Pläne“, Dissertation, Stockholm 1944.
- [16] E. Gotthardt: „Beiträge zur Frage der Genauigkeit der gegenseitigen Ortung von Senkrechtpildpaaren“, BuL 1940, S. 2–24.
- [17] H. Schmid: „An Analytical Treatment of the Orientation of a Photogrammetric Camera“, Ballistic Research Laboratories, US. Army Report 880, Oktober 1953.
- [18] H. Schmid: „An Analytical Treatment of the Problem of Triangulation by Stereo-photogrammetry“, Photogrammetria 1956–57, S. 67–77 und S. 91–116.
- [19] D. C. Brown: „Evolution, Application and Potential of the Bundle Method of Photogrammetric Triangulation“, Symposium der Int. Ges. f. Photogrammetrie, Komm. III, 1974 in Stuttgart.
- [20] D. C. Brown: „A Matrix Treatment of the General Problem of least Squares considering correlated Observations“, Ballistic Research Laboratories, Report 937, 1955.
- [21] G. Schut: „An Analysis of Methods and Results in Analytical Aerial Triangulation“, Photogrammetria 1957–58, S. 16–32.
- [22] G. C. Tewinkel: „Mathematical Basis of Analytic Aerotriangulation“, Techn. Bulletin 8, USC & GS, 1959.
- [23] K. Rinner: „Zur analytischen Behandlung photogrammetrischer Aufgaben“, BuL 1956, S. 1–10 u. S. 44–56.
- [24] E. H. Thompson: „An Essay on Analytical Photogrammetry“, Schermerhorn Jubilee Volume 1964, ITC Delft.
- [25] de Masson d'Autume: „Compensation d'un bloc de plusieurs bandes“, Bull. Geod. Science 20 (1961), S. 529–539.
- [26] F. Ackermann: „Über Matrizenstrukturen bei Blockausgleichungen“, Photogrammetria XIX (1962/62), S. 457–465.
- [27] H. Ebner: „Methoden der räumlichen Blockausgleichung und ihr numerischer Aufwand“, Österr. Zeitschrift f. Verm.-Wesen 1971, S. 129–139.
- [28] H. Bauer und J. Müller: „Compensation of Systematic Errors by Analytical Block Adjustment with Common Image Deformation Parameters“, Int. Kongreß f. Photogrammetrie 1972, Komm. III.
- [29] J. B. Case: „The Utilization of Constraints in Analytical Photogrammetry“, Photogrammetric Engineering 1961, S. 766–778.
- [30] H. Schmid und E. Schmid: „A Generalized Least Squares Solution for Hybrid Measuring Systems“, Canadian Surveyor 1965, S. 27–41.
- [31] K. Kraus und R. Bertin: „Kombinierte photogrammetrisch-terrestrische Katastervermessung“, BuL 1970, S. 241–248.
- [32] K. Wong und G. Elphinstone: „Aerotriangulation by SAPGO“, Photogrammetric Engineering XXXVIII 1972, S. 779–790.
- [33] G. Konecny: „Geometrische Probleme der Fernerkundung“, BuL 1972, S. 162–172.
- [34] G. Konecny: „Mathematische Modelle und Verfahren zur geometrischen Auswertung von Zeilenabtaster-Aufnahmen“, BuL 1976, S. 188–197.
- [35] G. Dowideit: „Eine Blockausgleichung für Aufzeichnungen des Seitwärts-Radar (SLAR)“, BuL 1977, S. 17.
- [36] H. P. Bähr: „Geometrische Modelle für Abtasteraufzeichnungen von Erderkundungssatelliten“, BuL 1976, S. 198.